Puzzel

Helaas wederom geen oplossing op de puzzel uit de vorige Aenorm. Dat de oplossing niet te moeilijk was laten we hier zien. Eerst de oude puzzel:

Stel dat a, b, en c drie rationele getallen zijn, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{5}$. Dan is de som van

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=$$
$$=\frac{1}{(1/6)^2}+\frac{1}{(2/15)^2}+\frac{1}{(3/10)^2}=$$
$$=36+\frac{225}{3}+\frac{100}{9}=$$
$$=\frac{1296+2025+400}{36}=$$
$$=\frac{3721}{36}=\frac{61^2}{6^2}=\left(\frac{61}{6}\right)^2,$$

het kwadraat van wederom een rationeel getal. Wij zijn op zoek naar het bewijs dat (wanneer a, b, en c drie rationele getallen zijn) $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ altijd een kwadraat van een rationeel getal is.

Stel x, y en z gelijk aan respectievelijk $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}$ en $\frac{1}{c-a}$. Dan is $\frac{1}{x}=a-b, \frac{1}{y}=b-c$ en $\frac{1}{z}=c-a$

en het is duidelijk dat $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

Het wegwerken van de breuken levert $yz + zx + xy = 0$. De uitdrukking waar we naar op zoek zijn is $x^2 + y^2 + z^2$. Samen met de uitdrukking $yz + zx + xy$ denken we direct aan $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy)$. Omdat $yz + zx + xy = 0$, is $x^2 + y^2 + z^2$ gelijk aan $(x + y + z)^2$, een kwadraat van een rationeel getal.

Dan nu de niewe puzzel. Oplossingen kunnen opgestuurd worden naar of ingeleverd worden bij de VSAE-kamer (E0.13).

Kobus, een man van middelbare leeftijd, is de leider van de plaatselijke fanfare. En omdat Kobus trots is op zijn fanfare, ziet zij er vaak piekfijn uit. Op een dag paradeert Kobus met zijn parade door de stad. Alles verloopt goed, totdat Kobus een onaangename ontdekking doet.

De leden van de fanfare staan netjes opgesteld in n rijen en m kolommen. Als Kobus de fanfare van de voorkant bekijkt, blijkt niet iedereen even goed zichtbaar te zijn. De kleine muzikanten verdwijnen namelijk achter de ruggen van de grotere muzikanten. Hoewel Kobus geen groot wiskundige is, verzint hij iets om het probleem op te lossen. Hij gaat namelijk iedere kolom van zijn fanfare op lengte selecteren. Na de rangschikking, lopen de kleine muzikanten vooraan en de lange achteraan. Nu is iedereen van de voorkant goed zichtbaar. Kobus kan dus tevreden zijn, maar is het toch niet helemaal. Als hij namelijk aan de zijkant van de fanfare staat, ziet hij dat nog steeds niet iedereen zichtbaar is. Om dit op te lossen denkt Kobus ook de rijen te kunnen rangschikken. Wederom moeten de lange muzikanten achteraan staan, terwijl de kleine muzikanten aan de voorkant mogen paraderen. Kobus voelt de bui echter al hangen. Door de selectie van de rijen zijn de kolommen natuurlijk ook veranderd. Maar wat ziet Kobus nu eigenlijk als hij weer voor de fanfare uitloopt?