Puzzel

Een nieuwe Aenorm en dus weer een nieuwe puzzel. Voor de goede orde volgt hier eerst de oude puzzel met de oplossing.

Voor je liggen 2 enveloppen met daarin een onbekend geldbedrag, je weet wel dat in de ene envelop 10 keer zoveel geld zit als in de andere. Na een willekeurige envelop geopend te hebben moet je kiezen welke envelop je neemt, de open of de gesloten.

In de envelop die je opent vind je 10 gulden. Je wilt het bedrag maximaliseren, dus je berekent de verwachting van het bedrag in de andere envelop als volgt uit:
verwachte bedrag gesloten envelop =
1/2*1/10*10 + 1/2*10*10 = 50,5

Hoe kan de verwachting van het bedrag in de gesloten enveloppe nu groter zijn? Het lijkt alsof er iets niet klopt aan het hele probleem...

We hebben dus een random vector (X, Y), met X het bedrag in de ene enveloppe en Y dat in de ander. De manier waarop je de enveloppen kiest, maakt aannames wat betreft de verdeling van deze vector. Ten eerste moeten de marginale verdelingen hetzelfde zijn. Dit geeft:

$$\begin{aligned} P(X=x) &= P(Y=x) \\ &= P(Y=x|X=10x)P(X=10x) + \\ &\quad P(Y=x|X=x/10)P(X=x/10) \\ &= (1/2)P(X=10x) + (1/2)P(X=x/10) \end{aligned}$$

We weten dat X slechts waarden aan kan nemen van de vorm 10^n. Noteer nu $P(X=10^n)$ door q_n. Dan kunnen we de bovenstaande vergelijking ook schrijven als:

$$q_n=(q_{n-1}+q_{n+1})/2$$

Als we vervolgens de punten (n, q_n) uitzetten in een grafiek zien we dat deze op een rechte lijn liggen. Als de helling van deze lijn ongelijk nul is, dan bevat de lijn q_n's waarvoor q_n kleiner dan nul is. Dit is onmogelijk aangezien q_n een kans is.Maar als de helling nul is, dan dan geldt $q_n = c$, voor een bepaalde c. Als we c = 0 nemen, geldt $\Sigma_n q_n=0$ en ook dit kan niet, aangezien de kansen moeten sommeren tot 1, want de q_n-etjes representeren de kansfunctie van X. Als c>0, wordt $\Sigma_n q_n=0$, wat ook vervalt om dezelfde reden. We moeten nu dus concluderen dat de random vector (X, Y) met de impliciet aangenomen eigenschappen niet bestaat.
Het punt is dat het beschreven experiment niet kan worden uitgevoerd. Het is klaarblijkelijk onmogelijk de hoeveelheden geld zo over de enveloppen te verdelen dat wat je ook in de eerste aantreft, de hoeveelheid in de andere enveloppe 10 of 1/10 keer zo veel bedraagt met gelijke kans (prof. dr. R. Meester uit *An introduction to probability theory for mathematics*).

De winnaar van het vorige nummer is Matthijs Gerritsen.

En dan nu de nieuwe puzzel. Mocht je op het strand liggen en denken ik heb niets te doen, beschouw dan het volgende.

Gegeven een rij a_1,.., a_n. De eertse twee elementen van de rij liggen vast, daarna is elk element het verschil tussen de voorgaande, waarbij dus geldt: $a_{n+1} = a_{n-1}-a_n$. Het getal nul is in de rij toegestaan, negatieve getallen niet.

Een voorbeeld :

100, 55, 45, 10, 35

Deze rij stopt bij 35, het volgende element zou –25 geweest zijn.

We beginnen nu met de volgende rij

100, B, …

Voor welk getal B wordt de rij het langst, in de zin van het aantal elementen ? Merk op dat B een geheel getal moet zijn.

Goede inzendingen kunnen worden ingeleverd of worden opgestuurd naar de Kraket- of VSAE-kamer. Onder de goede inzendingen wordt weer een boekenbon verloot.